

Equazioni con modulo

- *(Per visualizzare le pagine successive si va col mouse in fondo alla pagina e si clicca sulla freccia)*
 - Come prerequisito ricordiamo il significato della funzione valore assoluto e precisamente che $|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$
 - Esempio $|2| = 2$
 - $|-3| = +3$
 - L'equazione **elementare** è la seguente
 - $|x| = k$ con k numero reale positivo
e ammette due soluzioni: $x = k$ e $x = -k$
- Es. $|x| = 2$ ha come soluzioni $x = 2$ e $x = -2$

Equazioni con modulo

- si consideri ora l'equazione $|f(x)| = k$
- E evidente che
- se $k < 0 \Rightarrow$ l'equazione è impossibile
- Se $k = 0 \Rightarrow$ La soluzione è data da $f(x) = 0$
- Se $k > 0 \Rightarrow$ La soluzione è data da $f(x) = k$ e $f(x) = -k$
- Es. $|3x - 5| = 2$ La soluzione è data da

$$3x - 5 = 2 \quad \text{e} \quad 3x - 5 = -2$$

$$x = \frac{7}{3} \quad \text{e} \quad x = 1$$

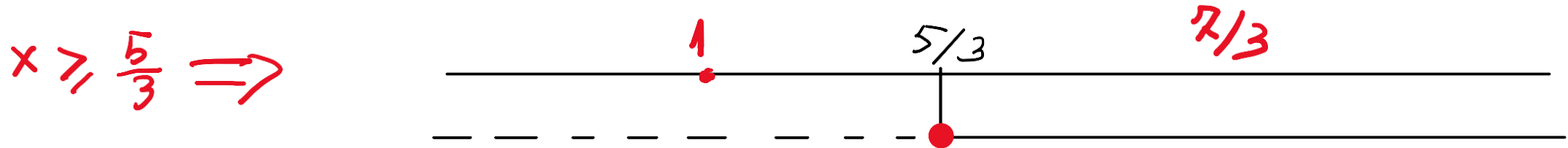
- Un modo più semplice di calcolare le soluzioni ve lo illustro nella prossima diapositiva

Equazioni con modulo

- Si studia il segno del modulo ponendo $f(x) \geq 0$ e si riporta la soluzione sulla retta che rappresenta l'insieme dei numeri reali; si ottengono degli intervalli e in ciascun intervallo viene riportato il segno di $f(x)$ e poi in base a tale segno si cercano le soluzioni

Riprendiamo l'esempio riportato nella diapositiva precedente

$$|3x - 5| = 2 ; \text{ si studia il segno del modulo ponendo } 3x - 5 \geq 0 \Rightarrow$$



a questo punto si continua impostando e risolvendo un sistema per ogni intervallo e precisamente

$$\begin{cases} x < \frac{5}{3} \Rightarrow 3x - 5 < 0 \\ 3x - 5 = -2 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{5}{3} \Rightarrow 3x - 5 \geq 0 \\ 3x - 5 = 2 \Rightarrow x = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Equazioni con modulo

- Applichiamo lo stesso procedimento per risolvere un'equazione del tipo $|f(x)| = g(x)$
- Es. $2|x^2 + x| = x - 2$
- Si studia il segno di $f(x)$ ponendo $f(x) \geq 0$ cioè $x^2 + x \geq 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x=0$ e $x=-1$ sono le radici $\Rightarrow$ le soluzioni della disequazione $x^2 + x \geq 0$ sono $x \leq -1$ e $x \geq 0$ che Riportiamo sulla retta dai numeri reali


$$\begin{cases} x \leq -1 \text{ e } x \geq 0 \Rightarrow x^2 + x \geq 0 \\ 2(x^2 + x) = x - 2 \\ \Downarrow \end{cases}$$
$$\begin{cases} -1 < x < 0 \Rightarrow x^2 + x < 0 \\ 2(-x^2 - x) = x - 2 \\ \Downarrow \end{cases}$$

Equazioni con modulo

- $$\begin{cases} x \leq -1 \text{ e } x \geq 0 \\ 2x^2 + 2x = x - 2 \\ 2x^2 + x + 2 = 0 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{4} \end{cases}$$

- Nessuna soluzione

- $$\begin{cases} -1 < x < 0 \\ -2x^2 - 2x = x - 2 \\ 2x^2 + 3x - 2 = 0 \\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \end{cases}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{4} \\ -\frac{8}{4} = -2 \end{array} \right.$

$\frac{3}{4}$

-2

-1

0

$\frac{3}{4}$

Nessuna soluzione accettabile

perché sia -2 che $\frac{3}{4}$ non

appartengono all'intervallo $(-1, 0)$

Equazioni con modulo

- Equazioni del tipo $|f(x)| = |g(x)|$

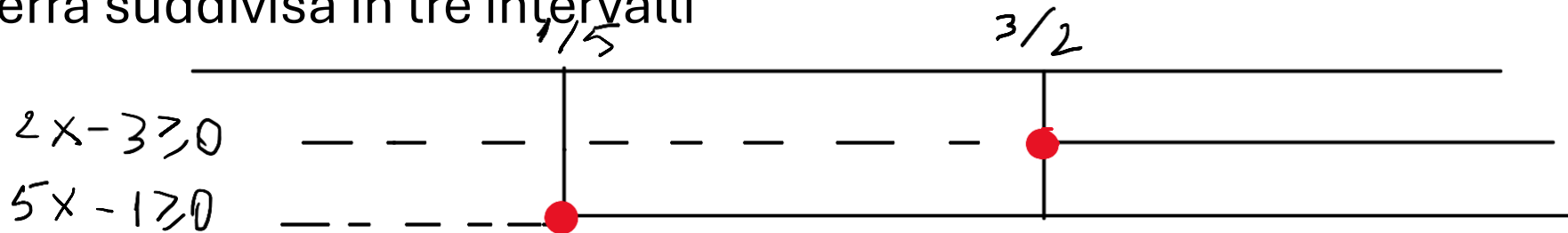
Procedimento in sintesi: si studia il segno di $f(x)$ e $g(x)$ ponendo $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$ e per ogni intervallo ottenuto si cercano i valori che soddisfano l'equazione data.
Esempio

$$|2x - 3| = |5x - 1|$$

$$2x - 3 \geq 0 \quad x \geq \frac{3}{2}$$

$$5x - 1 \geq 0 \quad x \geq \frac{1}{5}$$

Si riportano le soluzioni delle disequazioni sulla retta dei numeri reali che pertanto verrà suddivisa in tre intervalli



L'equazione sarà risolta dai tre sistemi della diapositiva successiva

Equazioni con modulo

$$\bullet \begin{cases} x \leq \frac{1}{5} \\ -2x + 3 = -5x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{5} \\ 3x = -2 \quad x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{5} \leq x < \frac{3}{2} \\ -2x + 3 = 5x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{5} \leq x < \frac{3}{2} \\ -7x = -4 \quad x = \frac{4}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ 2x - 3 = 5x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ -3x = +2 \quad x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

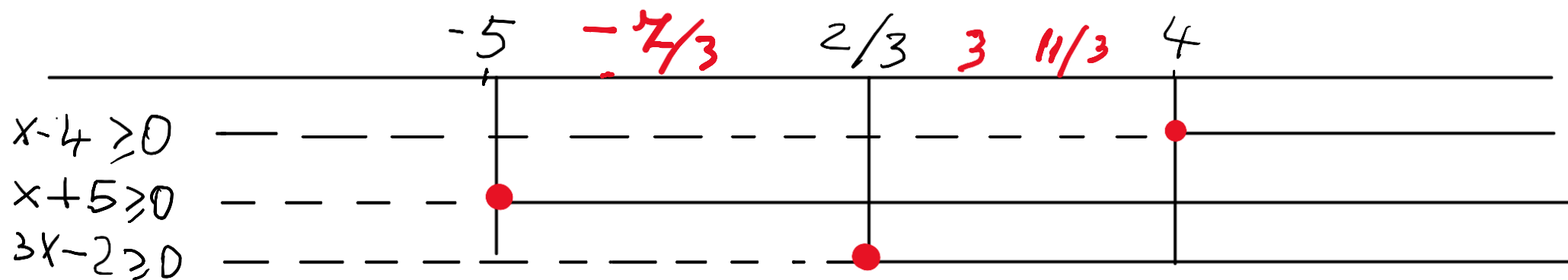
$-\frac{2}{3} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{3}{2}$

Conclusione $x = -\frac{2}{3}$ e $x = \frac{4}{7}$ sono soluzioni accettabili

Equazioni con modulo

Ora un esempio **con tre moduli**: $|x - 4| + |x + 5| = |3x - 2|$

$$x - 4 \geq 0 \quad x \geq 4; \quad x + 5 \geq 0 \quad x \geq -5; \quad 3x - 2 \geq 0 \quad x \geq 2/3$$



$$\begin{cases} x < -5 \\ -x + 4 - x - 5 = -3x + 2 \Rightarrow -x - x + 3x = -4 + 5 + 2 \Rightarrow x = 3 \text{ Non acc.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5 \leq x \leq \frac{2}{3} \\ -\cancel{x} + 4 + \cancel{x} + 5 = -3x + 2 \Rightarrow 3x = -4 - 5 + 2 \Rightarrow 3x = -7 \Rightarrow x = -\frac{7}{3} \text{ Acc.} \end{cases}$$

Equazioni con modulo

- $\begin{cases} \frac{2}{3} \leq x \leq 4 \\ -x+4+x+5=3x-2 \Rightarrow -3x=-4-5-2 \Rightarrow -3x=-11 \Rightarrow x=\frac{11}{3} \text{ acc.} \end{cases}$

- $\begin{cases} x \geq 4 \\ x-4+x+5=3x-2 \Rightarrow -x=-3 \Rightarrow x=3 \text{ non acc.} \end{cases}$