

Disequazioni irrazionali

Pag. 1

- Le disequazioni irrazionali sono quelle in cui l'incognita x è sotto il segno di radice
 - Sono di due tipi
 - Il tipo $\sqrt{f(x)} < g(x)$
 - Il tipo $\sqrt{f(x)} > g(x)$

Pag 2

Al fine di memorizzare il modo in cui si risolvono le disequazioni irrazionali ricordate che

le equazioni del **primo tipo** $\sqrt{f(x)} < g(x)$ si risolvono **con un sistema**

e quelle del **secondo tipo** $\sqrt{f(x)} > g(x)$ con **due sistemi**.

Spiegherò il perché applicando il procedimento agli esempi che seguono

Pag. 3

Sia data la seguente disequazione del **primo tipo**

$$\sqrt{3 - 2x} \leq x + 2$$

Si applica la condizione di realtà del radicale per cui risulta $3 - 2x \geq 0$

Di conseguenza anche il secondo membro dovrà essere positivo per cui risulta anche

$$x + 2 \geq 0$$

Essendo i due membri della disuguaglianza **entrambi positivi** si possono elevare al quadrato **entrambi i membri** e **il verso della disuguaglianza non cambia** per cui ci risulta $(\sqrt{3 - 2x})^2 \leq (x + 2)^2$

Pertanto la disequazione data sarà risolta dal seguente sistema

Pag. 4

$$\begin{cases} 3 - 2x \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \\ 3 - 2x \leq (x + 2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x \geq -3 \\ x \geq -2 \\ 3 - 2x \leq x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x \geq -2 \\ x^2 + 6x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

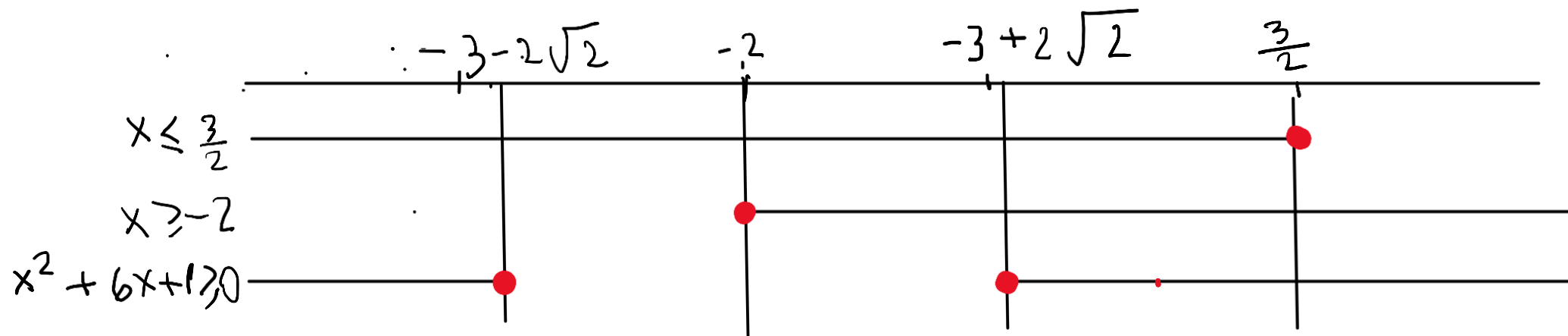
A questo punto si risolve la disequazione di secondo grado come segue $x = -3 \pm \sqrt{9-1} = -3 \pm \sqrt{8} = -3 \pm 2\sqrt{2}$

e si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x \geq -2 \\ x \leq -3 - 2\sqrt{2} \quad \text{e} \quad x \geq -3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Si riportano queste soluzioni in un grafico

Pag. 5



in conclusione la soluzione della disequazione è rappresentata dagli intervalli in cui sono soddisfatte tutte le disequazioni del sistema e quindi per

$$-3+2\sqrt{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$$

Pag. 6

- Sia data la seguente disequazione del **secondo tipo**

$$\sqrt{6x - x^2} > 3 - 2x$$

Si pone **la condizione di realtà del radicale** $6x - x^2 \geq 0$

a) se è $3 - 2x < 0$ La disequazione è senz'altro verificata dalle soluzioni comuni alle due disequazioni cioè dal sistema

$$\begin{cases} 6x - x^2 \geq 0 \\ 3 - 2x < 0 \end{cases}$$

b) Nel caso in cui sia $3 - 2x \geq 0$ entrambi i membri della disequazione data sono positivi e quindi risulta $(\sqrt{6x - x^2})^2 > (3 - 2x)^2$ da cui segue $6x - x^2 > (3 - 2x)^2$.

Pag. 7

In questo caso la disequazione è soddisfatta dalle soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} 6x - x^2 \geq 0 \\ 3 - 2x \geq 0 \\ 6x - x^2 > (3 - 2x)^2 \end{cases}$$

E siccome la prima $6x - x^2 \geq 0$ è implicita nella terza

$$6x - x^2 > (3 - 2x)^2$$

ne segue che il sistema si riduce al seguente

$$\begin{cases} 3 - 2x \geq 0 \\ 6x - x^2 > (3 - 2x)^2 \end{cases}$$

In conclusione le soluzioni della disequazione irrazionale di secondo tipo

$$\sqrt{6x - x^2} > 3 - 2x$$

Si ottengono risolvendo i seguenti sistemi

Pag. 8

$$\begin{cases} 6x - x^2 \geq 0 \\ 3 - 2x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(6-x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 6 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \end{cases}$$

U

$$\begin{cases} 3 - 2x \geq 0 \\ 6x - x^2 > (3 - 2x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ 6x - x^2 > 9 - 12x + 4x^2 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$5x^2 - 18x + 9 < 0$$

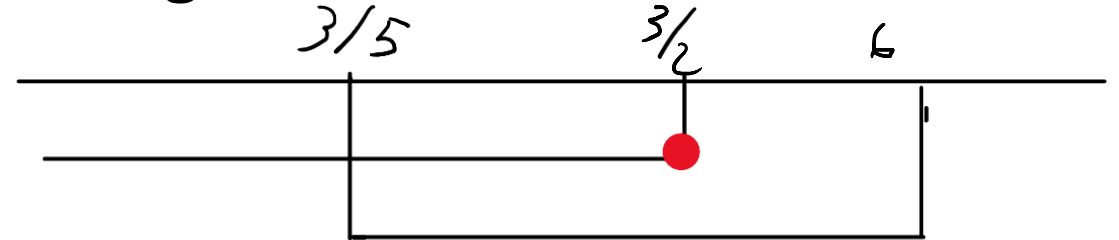
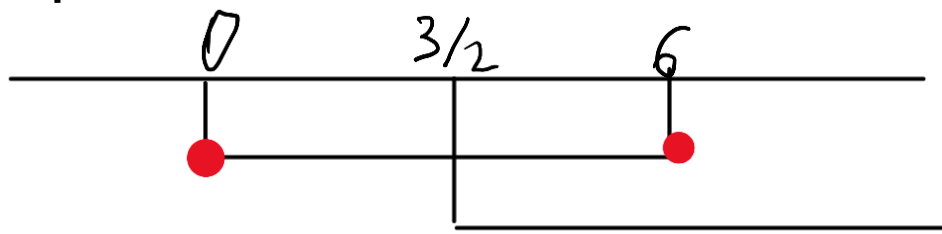
$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 45}}{5} = \begin{matrix} \frac{3}{5} \\ 3 \end{matrix}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ \frac{3}{5} < x < 3 \end{cases}$$

Pag. 9

Riportiamo le soluzioni dai sistemi in nei grafici



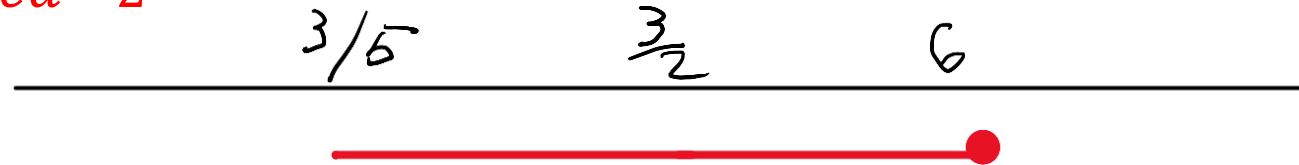
U

$$S_1 : 3 < x \leq 6$$

U

$$S_2 : \frac{3}{5} < x \leq \frac{3}{2}$$

E unendo S_1 ed S_2 si ha



$$S : \frac{3}{5} < x \leq 6$$